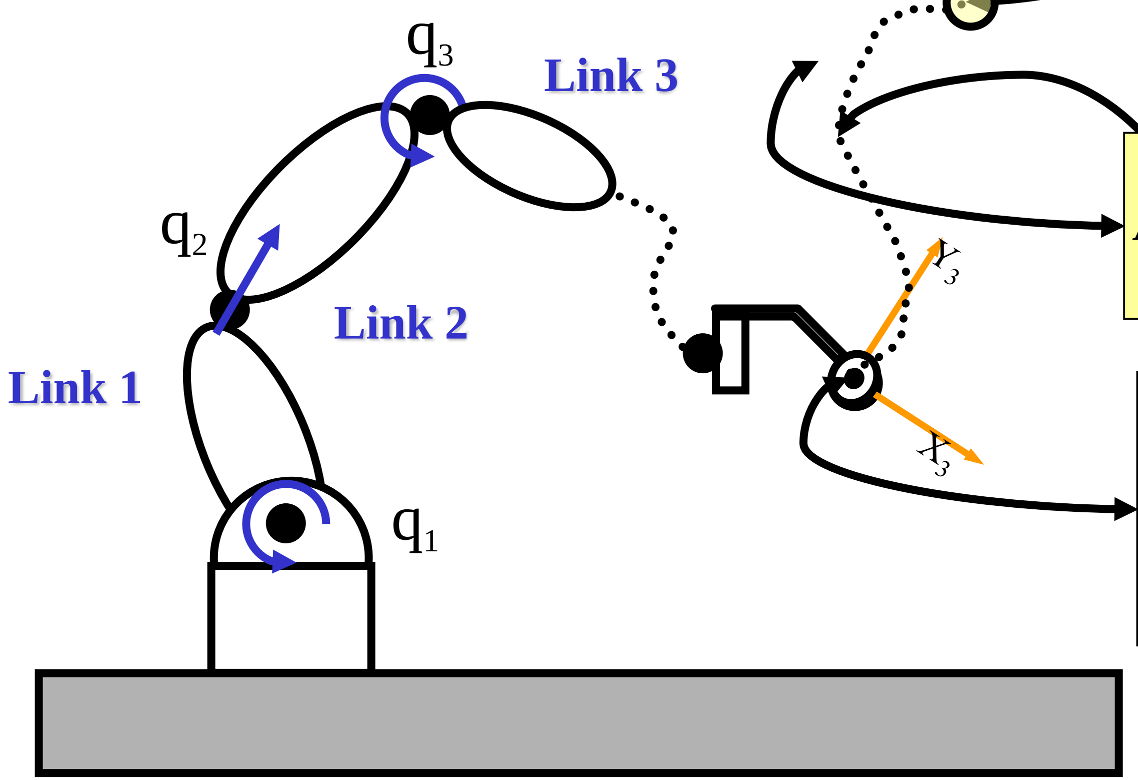
Fundamentos de Robótica: Cinemática Inversa

Juan Carlos Grieco, Universidad Simón Bolívar

Gerardo Fernández L, Universidad Simón Bolívar

Cinemática inversa…



$$A_{final} = \begin{bmatrix} r_{11}^{\ f} & r_{12}^{\ f} & r_{13}^{\ f} & f_x \\ r_{21}^{\ f} & r_{22}^{\ f} & r_{23}^{\ f} & f_y \\ r_{31}^{\ f} & r_{32}^{\ f} & r_{33}^{\ f} & f_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

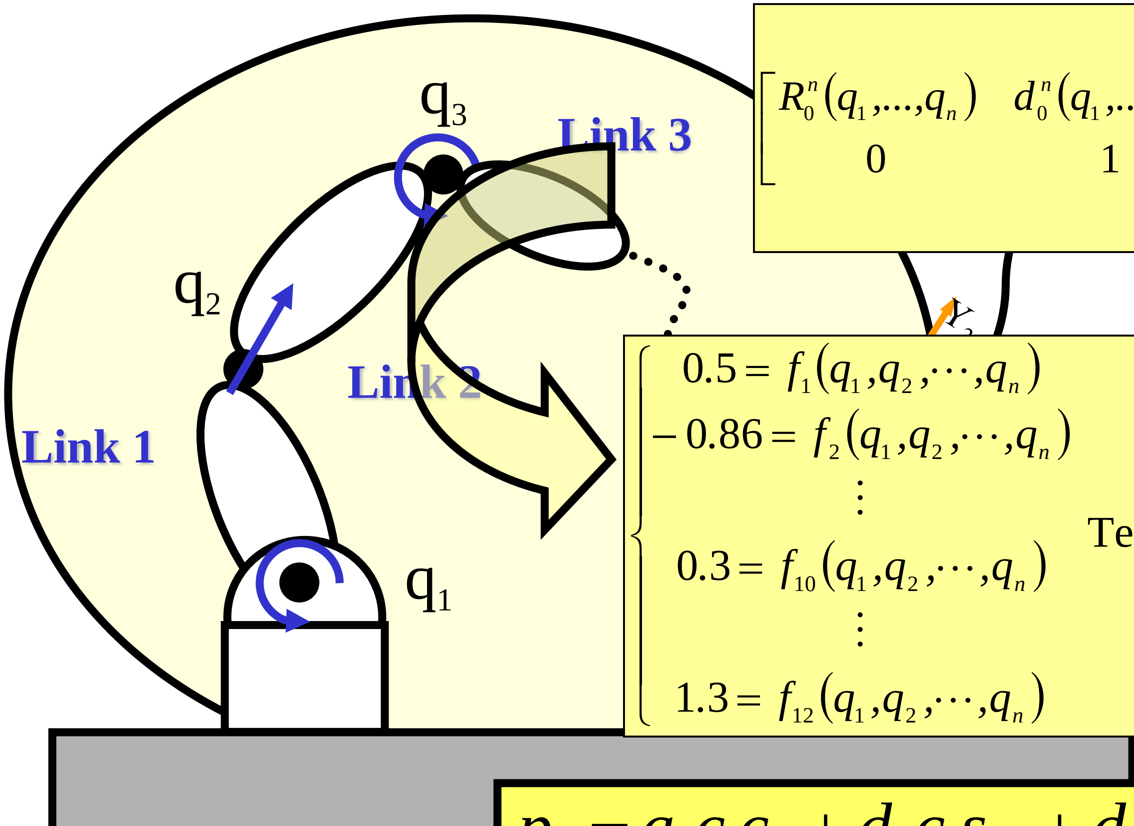
$$A(t) = \left[\begin{array}{c:c:c:c} \vec{r}_1(t) & \vec{r}_2(t) & \vec{r}_3(t) & \vec{d}_T(t) \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_{inicial} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & a_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & a_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & a_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

????

Cinemática inversa…

…es un problema mucho más complejo…



$$\begin{bmatrix} R_0^n(q_1,\ldots,q_n) & d_0^n(q_1,\ldots,q_n) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.86 & 0 & 0.3 \\ 0.86 & 0.5 & 0 & -0.45 \\ 0 & 0 & 1 & 1.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.5 = f_1(q_1,q_2,\cdots,q_n) \\ -0.86 = f_2(q_1,q_2,\cdots,q_n) \\ \vdots \\ 0.3 = f_{10}(q_1,q_2,\cdots,q_n) \\ \vdots \\ 1.3 = f_{12}(q_1,q_2,\cdots,q_n) \end{cases}$$

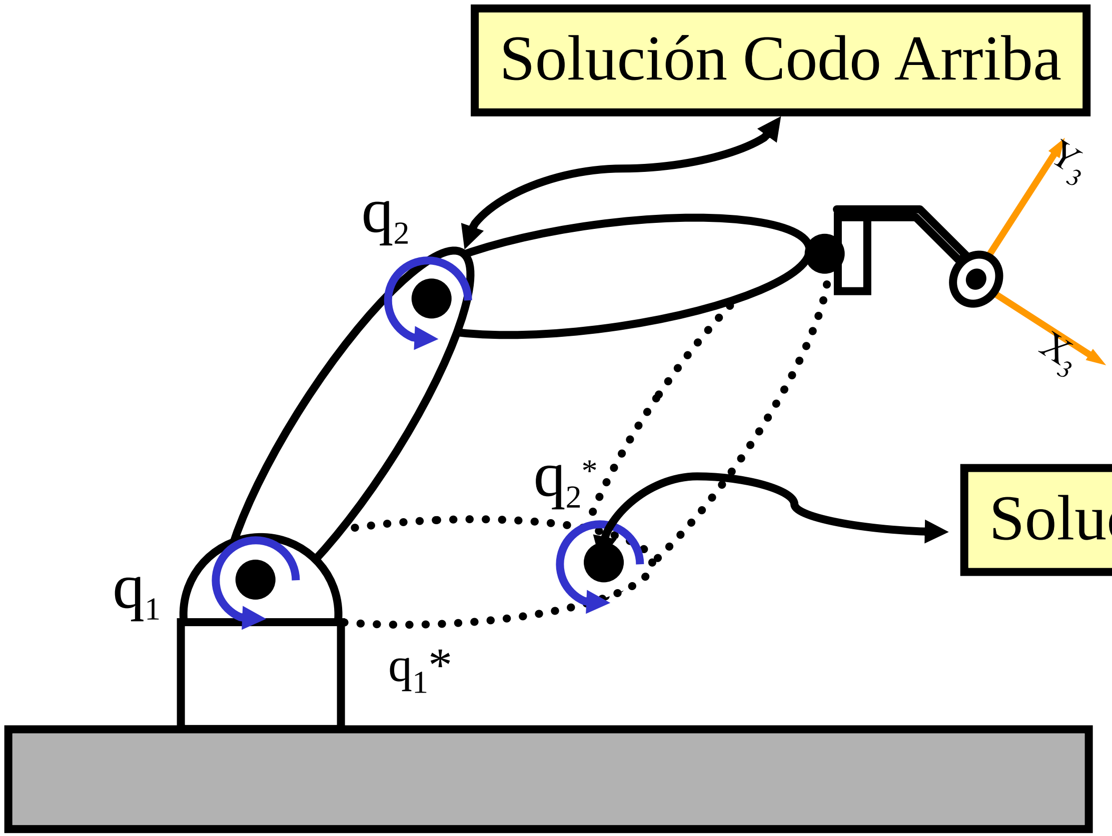
Tenemos 12 ecuaciones con n incógnitas

$$p_x = a_2c_1c_2 + d_4c_1s_{23} + d_6(c_1(c_{23}c_4s_5 + c_5s_{23}) + s_1s_4s_5$$

…y no lineal…

Cinemática inversa…

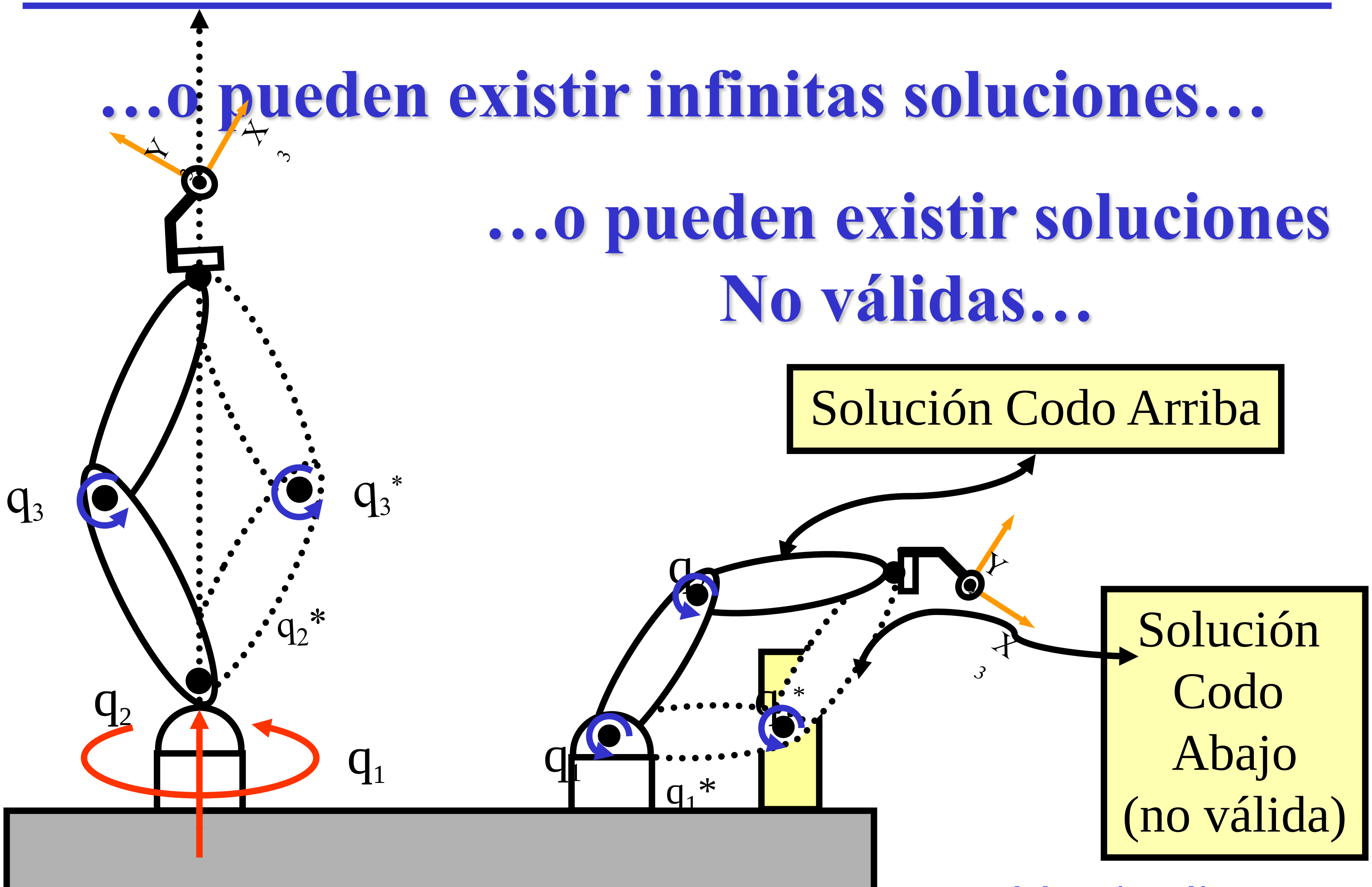
…pueden existir multiples soluciones…



Cinemática inversa…

…o pueden existir infinitas soluciones…

…o pueden existir soluciones No válidas…

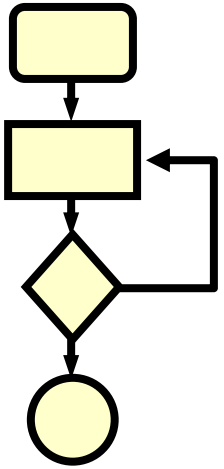


…¿Cómo determinamos la Cinemática Inversa?…

Solución Cerrada

$$q_i(t) = f_i(p_x, p_y, p_z, \phi, \theta, \psi)$$

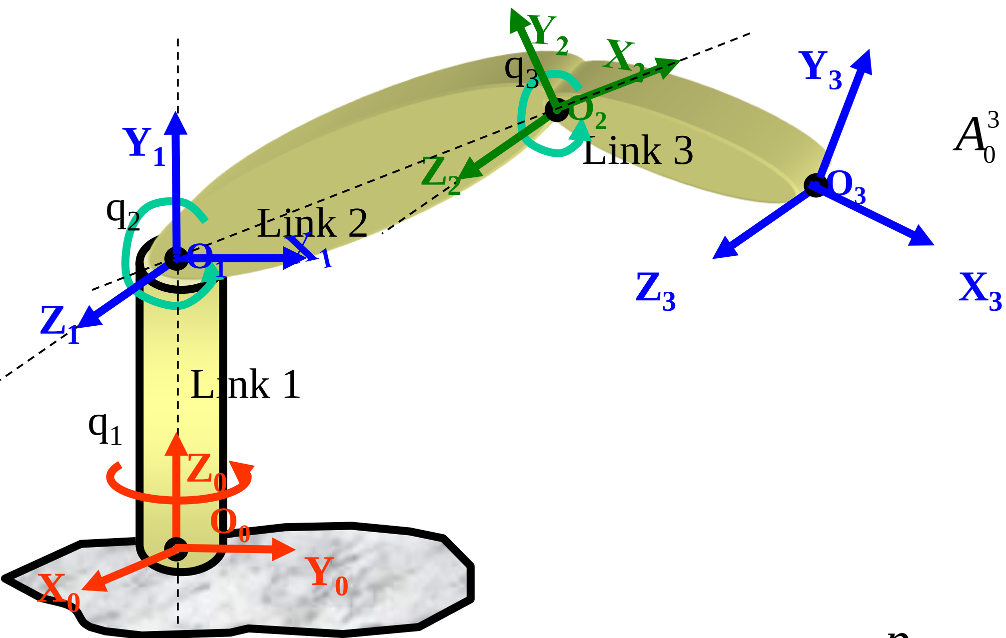
Solución Numérica



Intuición Algebraica

Intuición Geométrica

Intuición Algebraica…



$$A_0^3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ a_2 s_2 + a_3 s_{23} + d_1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23})}{c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23})} = tan(\theta_1) \Rightarrow \theta_1 = tan^{-1}\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$

Link	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	**q_1**	**L_1**	**0**	**$\pi/2$**
2	**q_2**	**0**	**L_2**	**0**
3	**q_3**	**0**	**L_2**	**0**

…dos soluciones para q_1

Cinemática inversa…

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\quad \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ a_2s_2 + a_3s_{23} + d_1 \end{bmatrix}$$

para cada q_1 tenemos…

$$\frac{p_y}{s_1} = a_2c_2 + a_3c_{23}$$

$$p_z - d_1 = a_2s_2 + a_3s_{23}$$

$$\left(\frac{p_y}{s_1}\right)^2 + (p_z - d_1)^2 = a_2{}^2c_2{}^2 + 2a_2c_2a_3c_{23} + a_3{}^2c_{23}{}^2 + a_2{}^2s_2{}^2 + 2a_2s_2a_3s_{23} + a_3{}^2s_{23}{}^2$$

$$\left(\frac{p_y}{s_1}\right)^2 + (p_z - d_1)^2 = a_2{}^2 + 2a_2a_3(c_2c_{23} + s_2s_{23}) + a_3{}^2$$

$$\left(\frac{p_y}{s_1}\right)^2 + (p_z - d_1)^2 = a_2{}^2 + 2a_2a_3\cos(-q_3) + a_3{}^2 = a_2{}^2 + 2a_2a_3\cos(q_3) + a_3{}^2$$

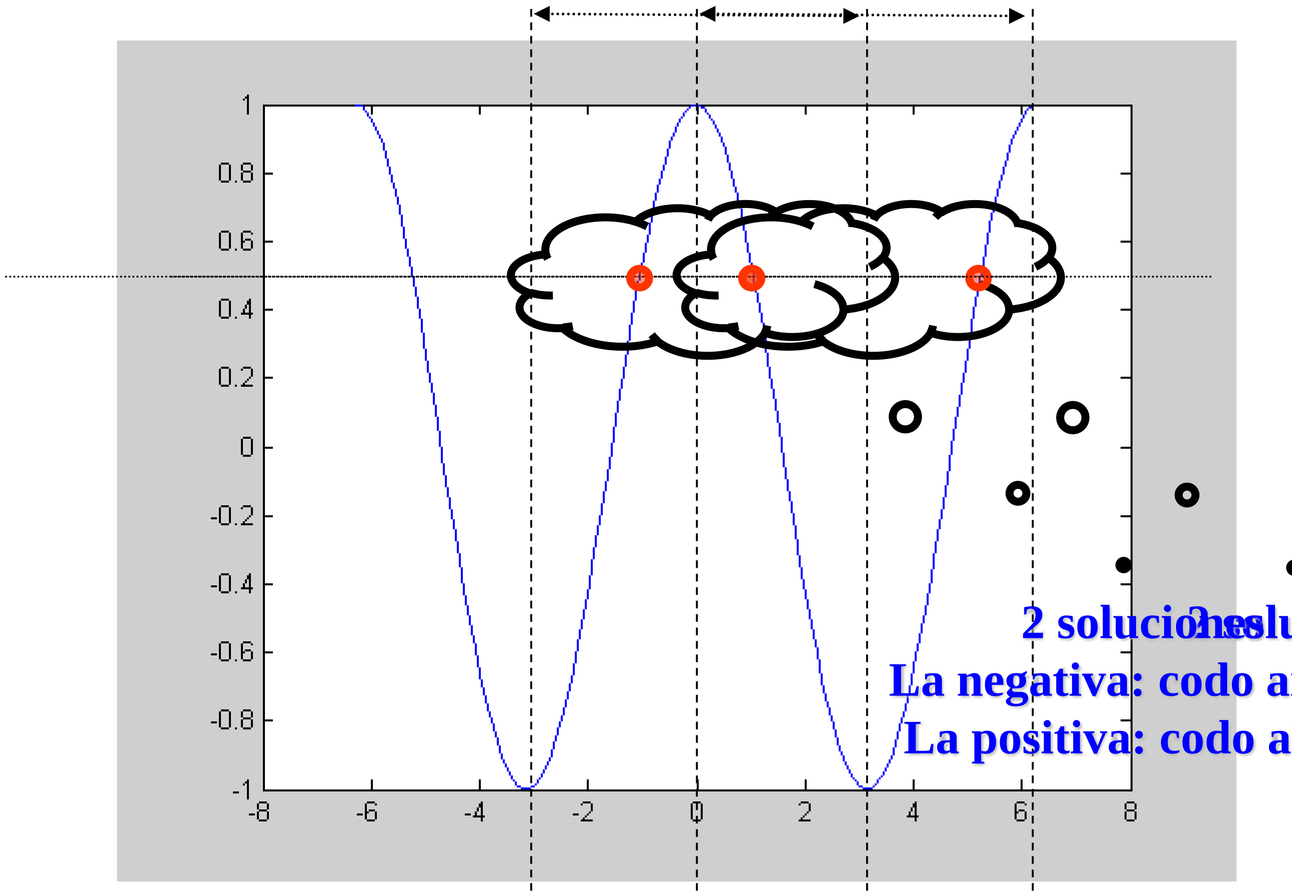
$$\cos(q_3) = \frac{\left(\frac{p_y}{s_1}\right)^2 + (p_z - d_1)^2 - a_2{}^2 - a_3{}^2}{2a_2a_3} \Rightarrow q_3 = \cos^{-1}\left(\frac{\left(\frac{p_y}{s_1}\right)^2 + (p_z - d_1)^2 - a_2{}^2 - a_3{}^2}{2a_2a_3}\right)$$

…dos soluciones para q_3

Cinemática Inversa…

Entre - π y π

Entre 0 y 2π



2 soluciones

La negativa: codo arriba

La positiva: codo abajo

Cinemática inversa…

$$\begin{matrix} ① \\ ② \\ ③ \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ a_2s_2 + a_3s_{23} + d_1 \end{bmatrix}$$

Y para cada par q_1, q_3 tenemos…

…conocidos

$$\frac{p_y}{s_1} = a_2c_2 + a_3c_{23}$$

$$p_z - d_1 = a_2s_2 + a_3s_{23}$$

$$\frac{p_y}{s_1} = a_2c_2 + a_3(c_2c_3 - s_2s_3) = (a_2 + a_3c_3)c_2 - a_3s_3s_2$$

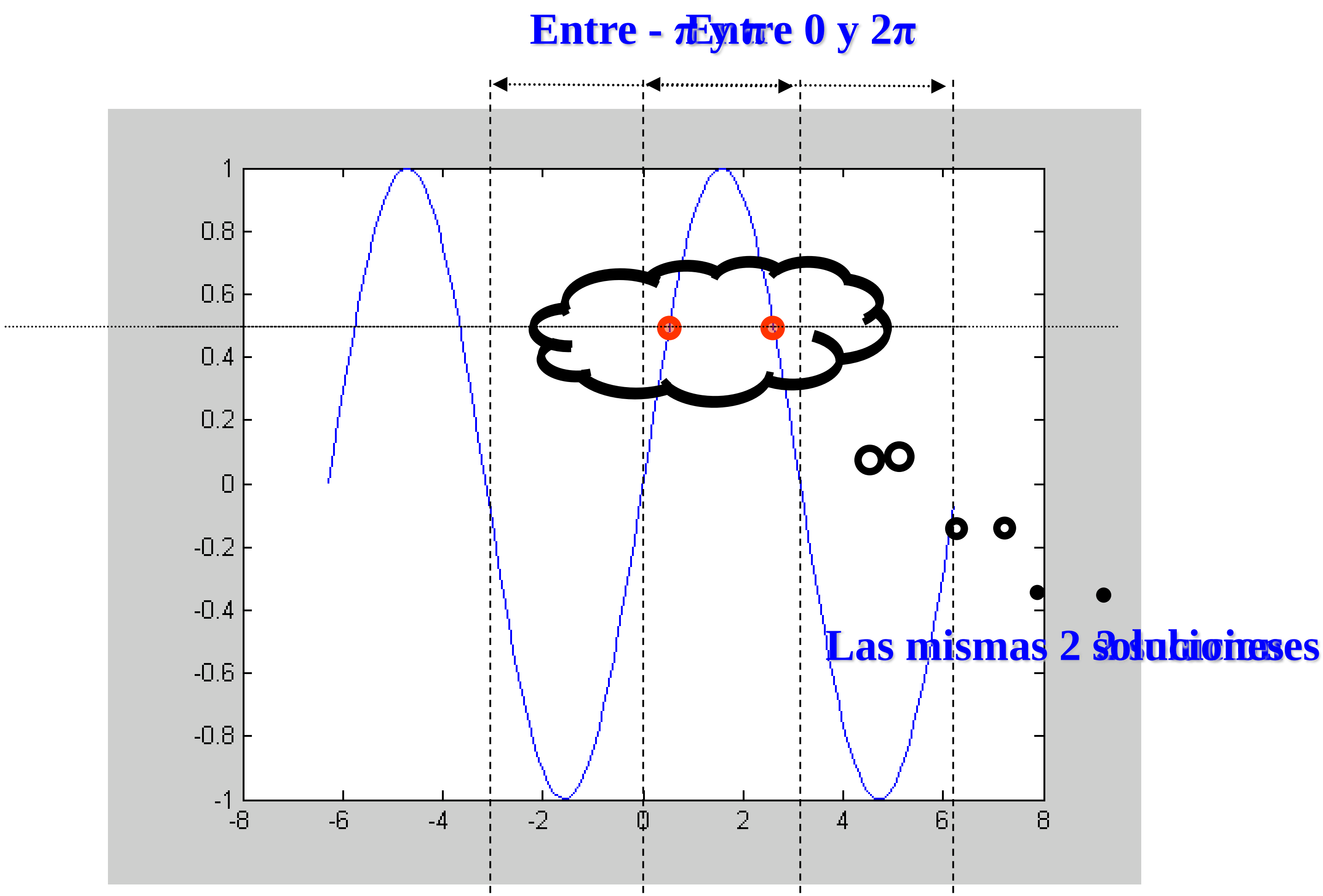
$$p_z - d_1 = a_2s_2 + a_3(c_2s_3 + s_2c_3) = (a_2 + a_3c_3)s_2 + a_3s_3c_2$$

$$\frac{\frac{p_y}{s_1} + a_3s_3s_2}{(a_2 + a_3c_3)} = c_2 \Rightarrow p_z - d_1 = (a_2 + a_3c_3)s_2 + \frac{\frac{p_y}{s_1}a_3s_3 + a_3{}^2s_3{}^2s_2}{(a_2 + a_3c_3)}$$

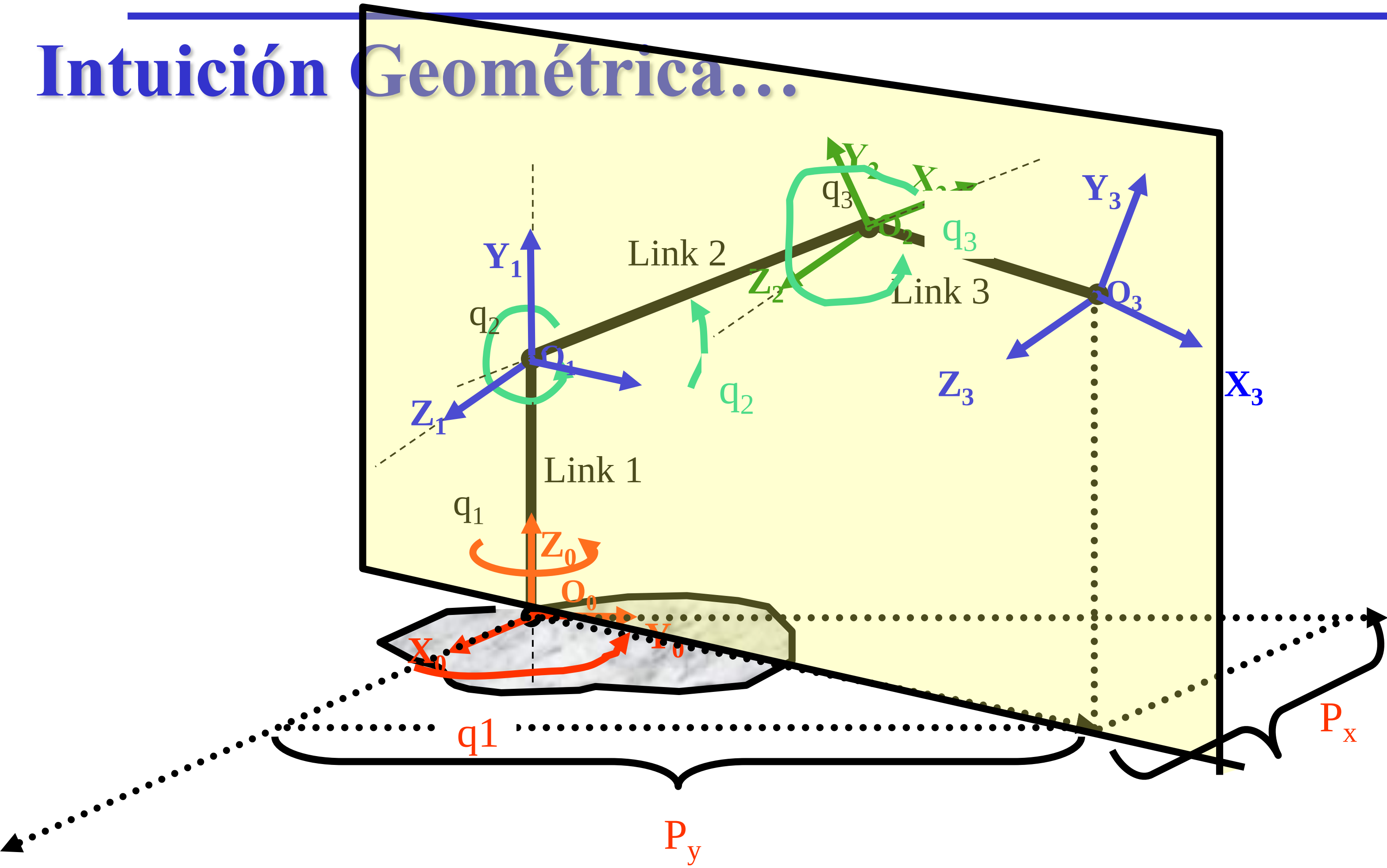
$$\frac{(p_z - d_1)(a_2 + a_3c_3) - \frac{p_y}{s_1}a_3s_3}{(a_2 + a_3c_3)^2 + a_3{}^2s_3{}^2} = sen(q_2)$$

…una solución para q_2

Cinemática Inversa…



Intuición Geométrica…



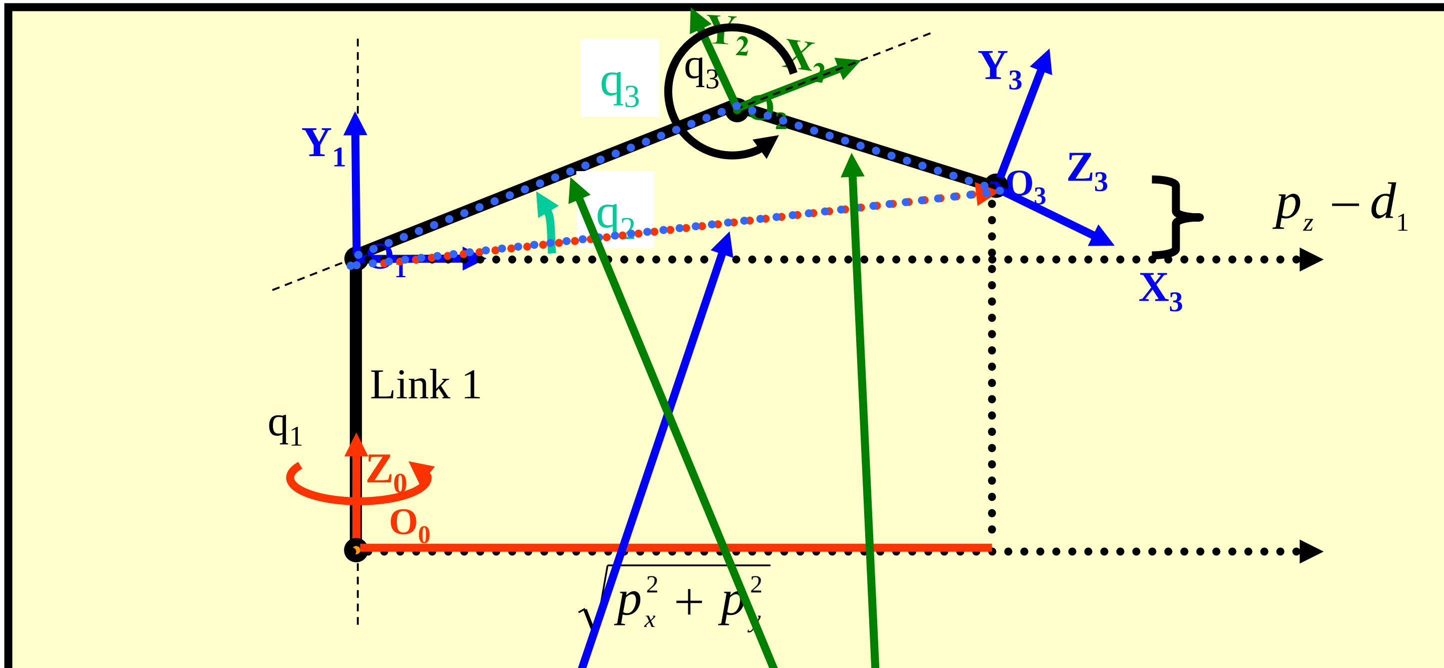
$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{s_1}{c_1} = tan(\theta_1) \Rightarrow \theta_1 = tan^{-1}\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$

…dos soluciones para q_1

…dos soluciones para q_1

Cinemática inversa…

Intuición Geométrica…



$$p_x^2 + p_y^2 + (p_z - d_1)^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3c_\alpha \Rightarrow \alpha = q_3 - \Pi$$

$$-c_\alpha = \frac{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - d_1)^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} = cos(q_3)$$

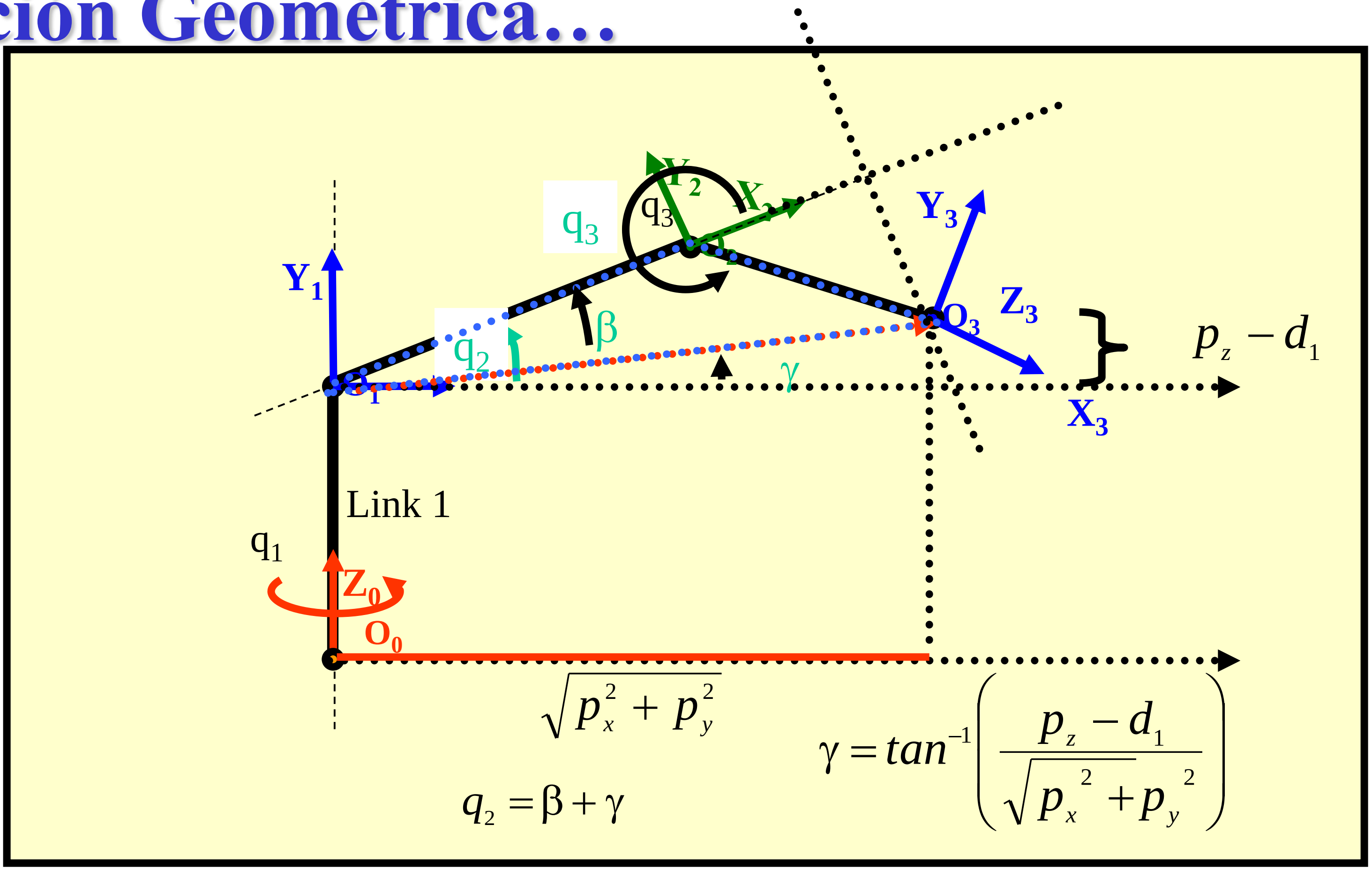
…dos soluciones para q_3

…dos soluciones para q_1

Cinemática inversa…

q_3

Intuición Geométrica…



$$\gamma = tan^{-1}\left(\frac{p_z - d_1}{\sqrt{p_x^{\;2} + p_y^{\;2}}}\right)$$

$$q_2 = \beta + \gamma$$

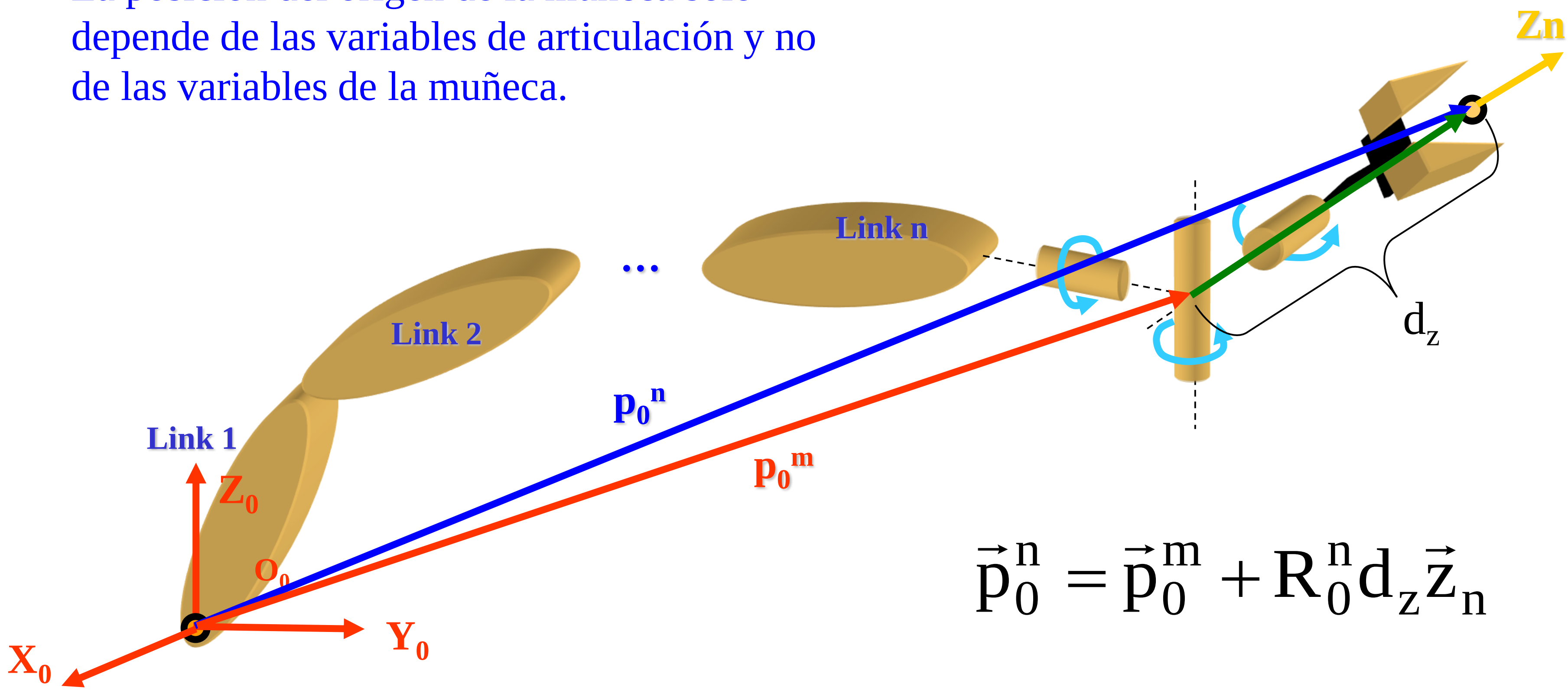
$$\beta = tan^{-1}\left(\frac{a_3 senq_3}{a_2 + a_3 \cos q_3}\right)$$

…dos soluciones para q_2

El Problema Cinemático Inverso…

El problema está, para este robot de *n links*, sub-determinado …

Hipótesis de la muñeca esférica:
La posición del origen de la muñeca sólo depende de las variables de articulación y no de las variables de la muñeca.



$$\vec{p}_0^{\,n} = \vec{p}_0^{\,m} + R_0^n d_z \vec{z}_n$$

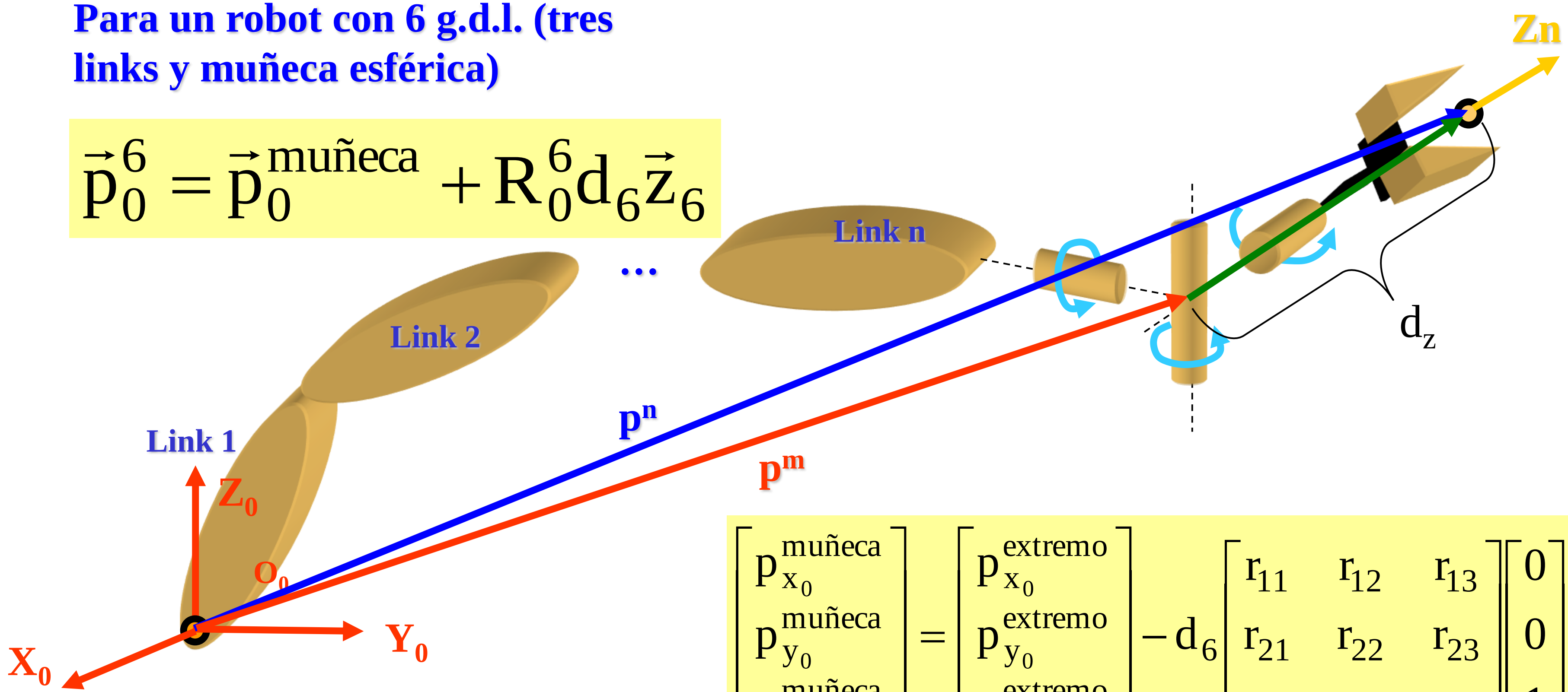
El Problema Cinemático Inverso…

$$\vec{p}_0^{\,n} = \vec{p}_0^{\,m} + R_0^n d_z \vec{z}_n$$

$$\vec{p}_0^{\,muñeca} = \vec{p}_0^{\,6} - R_0^6 d_6 \vec{z}_6$$

Para un robot con 6 g.d.l. (tres links y muñeca esférica)

$$\vec{p}_0^{\,6} = \vec{p}_0^{\,muñeca} + R_0^6 d_6 \vec{z}_6$$



$$\begin{bmatrix} p_{x_0}^{muñeca} \\ p_{y_0}^{muñeca} \\ p_{z_0}^{muñeca} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{x_0}^{extremo} \\ p_{y_0}^{extremo} \\ p_{z_0}^{extremo} \end{bmatrix} - d_6 \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El Problema Cinemático Inverso …

$$\begin{cases} p_{x_0}^{\text{muñeca}} = p_{x_0}^{\text{extremo}} - d_6 r_{13} \\ p_{y_0}^{\text{muñeca}} = p_{y_0}^{\text{extremo}} - d_6 r_{23} \\ p_{z_0}^{\text{muñeca}} = p_{z_0}^{\text{extremo}} - d_6 r_{33} \end{cases}$$

$$A_0^3 = \begin{bmatrix} R_0^3(q_1, q_2, q_3) & \begin{matrix} p_{x_0}^{\text{muñeca}}(q_1, q_2, q_3) \\ p_{y_0}^{\text{muñeca}}(q_1, q_2, q_3) \\ p_{z_0}^{\text{muñeca}}(q_1, q_2, q_3) \end{matrix} \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculamos los valores de la posición de la muñeca y los igualamos a las tres ecuaciones que vienen de la C.D.

De ahí despejamos los valores de q_1, q_2 y q_3 (sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas).

Con los valores de q_1, q_2 y q_3 determinamos el valor numérico de R_0^3.

El Problema Cinemático Inverso…

$$R_0^6 = R_0^3 R_3^6$$

R_0^6 y R_0^3 son conocidas *<u>numéricamente</u>* (R_0^6 es la orientación del extremo -es un dato para el problema cinemático inverso-, y R_0^3 la acabamos de calcular), luego:

$$R_3^6 = \left(R_0^3\right)^{-1} R_0^6 = \left(R_0^3\right)^{T} R_0^6$$

Con R_3^6 puedo calcular los tres ángulos de la muñeca. Podría asociarlos a la forma mecánica de la muñeca ó, si la muñeca es de EULER, podría asociar los valores a la matriz de Euler, encontrando el valor de los ángulos de Euler $\{q_4,q_5,q_6\}$

Ejemplo: Cinemática Inversa